

УДК 621.771.01

Сатонин А. В.  
Настоящая С. С.  
Коренко М. Г.  
Переходченко В. А.

## ЧИСЛЕННОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОНКИХ ЛЕНТ И ПОЛОС

Дальнейшее развитие технологий и оборудования различных процессов обработки металлов давлением, в том числе и процессов горячей прокатки относительно тонких лент и полос, неразрывно связано с совершенствованием методов их расчета, осуществляемого на основе уточнения граничных условий очага деформации и последующего использования достаточно строгого математического аппарата.

Применительно к процессам прокатки относительно тонких лент и полос в настоящее время достаточно широкое распространение получили основанные на конечно-разностных подходах численные математические модели, представленные в работах [1–3] и ряде других. В то же время использование в данных работах инженерного варианта условия пластичности и аналитического описания внешнего контактного трения в виде закона Амонтона-Кулона делает целесообразным их использование преимущественно к процессам холодной прокатки, в то время как условия реализации процессов горячей прокатки требует максимально полного учета влияния касательных компонент девиатора напряжений.

Целью настоящего исследования является разработка математических моделей, максимально полно учитывающих факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние металла относительно тонких лент и полос при их прокатке на штрипсовых и широкополосных станах.

Непосредственно численное математическое моделирование локальных и интегральных характеристик напряженно-деформированного состояния металла при горячей прокатке относительно тонких лент и полос по аналогии с методиками работ [1, 2] осуществляли путем разбиения по оси  $X$  (рис. 1, а) всей протяженности зоны пластического формоизменения  $L_{nl}$  на конечное множество  $i$ -ых элементарных объемов (рис. 1, б) и в последующем рекуррентном решении конечно-разностной формы статодинамических условий баланса энергетических затрат, рассматриваемых в рамках каждого из них. Общую зону пластического формоизменения определяли как:

$$L_{nl} = \sqrt{R_{np0} \Delta h - \Delta h^2 / 4}, \quad (1)$$

где  $R_{np0}$  – приведенное значение радиуса упруго деформированных рабочих валков;

$\Delta h = h_0 - h_1$  – величина абсолютного обжатия полосы, определяемая ее начальной  $h_0$  и конечной  $h_1$  толщинами.

Геометрические характеристики  $\Delta x, x_{i1}, x_{i2}$  каждого отдельного  $i$ -го выделенного элементарного объема (см. рис. 1, б) в этом случае соответствовали:

$$\Delta x = L_{nl} / n; x_{i1} = L_{nl} - \Delta x(i-1); x_{i2} = x_{i1} - \Delta x. \quad (2)$$

Исходя из параболической аппроксимации контактных поверхностей рабочих валков [4], определим и соответствующие значения толщин (см. рис. 1, б):

$$h_{xi1} = h_1 + \Delta h(x_{i1} / L_{nl})^2; h_{xi2} = h_1 + \Delta h(x_{i2} / L_{nl})^2, \quad (3)$$

где последний цифровой индекс (1), свидетельствует о принадлежности данной компоненты начальному  $cd$ , а цифровой индекс (2) – конечному  $ae$  граничным сечениям выделенного  $i$ -го элементарного объема очага деформации.

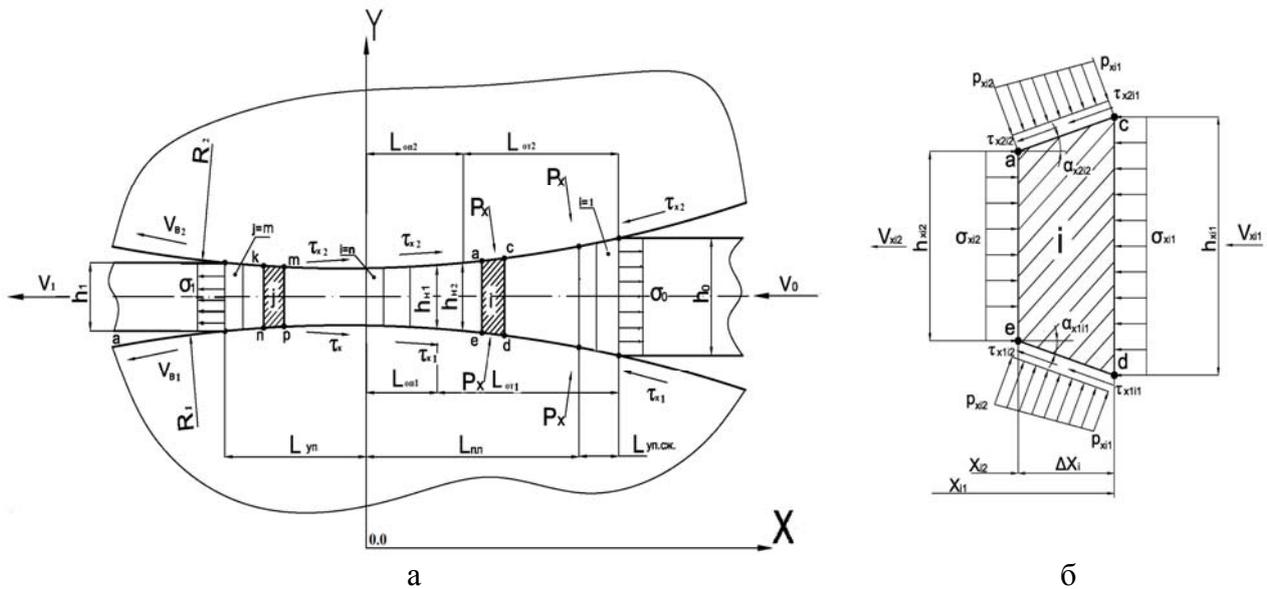


Рис. 1. Расчетная схема интегрального очага деформации применительно к математическому моделированию напряженно-деформированного состояния металла при горячей прокатке относительно тонких лент и полос (а), а также расчетная схема элементарного объема, выделенного в зоне пластического формоизменения (б)

В рамках численного математического моделирования напряженно-деформированного состояния металла при горячей прокатке относительно тонких полос был принят ряд допущений, основными из которых, по аналогии с методиками работ [1–4] являются следующие:

- кинематика пластического течения металла в очаге деформации подчиняется гипотезе плоских сечений, при этом нормальные осевые напряжения  $\sigma_{xi}$  и показатели удвоенного значения сопротивления сдвигу  $2K_{xi}$ , изменяясь по длине зоны пластического формоизменения по высоте каждого отдельного поперечного сечения остаются постоянными;
- изменения текущих значений толщины  $h_{xi} = h_{xi1} \dots h_{xi2}$ , а также нормальных  $P_{xi} = P_{xi1} \dots P_{xi2}$  и касательных  $\tau_{xli} = \tau_{xli1} \dots \tau_{xli2}$ ,  $\tau_{x2i} = \tau_{x2i1} \dots \tau_{x2i2}$  контактных напряжений по длине каждого отдельного выделенного  $i$ -го элементарного объема носят линейный характер (см. рис. 1, б);
- аналитические описания касательных контактных напряжений подчиняются более приемлемому с точки зрения условия горячего деформирования закону пластического трения  $\tau_x = 2K_x \mu_x$ , при этом текущие значения коэффициентов трения  $\mu_x$ , могут быть определены имеющими достаточно большое количество степеней свободы зависимостями вида:

$$\mu_{x1(2)} = \mu_{0on1(2)} \left[ (x - L_{on1(2)}) / (L_{nl} - L_{on1(2)}) \right]^{a_{\mu_{on1(2)}}} \text{ при } L_{on1(2)} \leq x \leq L_{nl}; \quad (4)$$

$$\mu_{x1(2)} = -\mu_{0on1(2)} \left[ (L_{on1(2)} - x) / L_{on1(2)} \right]^{a_{\mu_{on1(2)}}} \text{ при } 0,0 \leq x < L_{on1(2)}, \quad (5)$$

где за положительные приняты значения касательных контактных напряжений  $\tau_{x1}, \tau_{x2}$ , являющихся сонаправленными с вектором скорости перемещения прокатываемого металла, что, в частности отражено знаком (+) в выражении (4) для зон отставания и знаком (-) в выражениях (5) для зон опережения интегрального очага деформации (см. рис. 1, а);

$\mu_{0on1(2)}, \mu_{0on1(2)}$  – опорные для зон отставания и зон опережения на нижнем и верхнем рабочих валках значения коэффициентов внешнего пластического трения, соответствующим количественно значениям данного коэффициента  $\mu_x$  в начальном ( $x/L_{nl} = 1,0$ ) и конечном ( $x/L_{nl} = 0,0$ ) граничных сечениях зоны пластического формоизменения металла (см. рис. 1) и определяемые целым рядом технологических факторов [3, 4];

$L_{on1}, L_{on2}$  – протяженности зон опережения на нижнем и верхнем рабочих валках;

$a_{\mu_{on1(2)}}, a_{\mu_{on2}}, a_{\mu_{on1(2)}}, a_{\mu_{on2}}$  – степенные показатели, характеризующие форму эпюры расчетных распределений коэффициентов трения  $\mu_{x1}, \mu_{x2}$  по длине зоны пластического формоизменения металла.

Сведя с учетом характера принятых допущений и конечно-разностной формы представления основных компонент напряженно-деформированного состояния (см. рис. 1, б) активные составляющие в левую, а реактивные составляющие в правую часть, статодинамическое условие баланса энергетических затрат, рассматриваемого в рамках каждого отдельного выделенного  $i$ -го элементарного объема можно записать как:

$$N_{\sigma i1} + N_{\tau i1} + N_{\tau i2} = N_{\sigma i2} + N_{\tau i1} + N_{\tau i2} + N_{Fi} + N_{ui}, \quad (6)$$

где  $N_{\sigma i1}, N_{\sigma i2}$  – мощности нормальных осевых напряжений, действующих, соответственно, в начальном  $cd$  и конечном  $ae$  граничных сечениях выделенного  $i$ -го элементарного объема;

$N_{\tau i1}, N_{\tau i2}$  – мощности, подводимые в зонах отставания и отводимые в зонах опережения силами внешнего трения на контактных поверхностях нижнего и верхнего рабочих валков;

$N_{\tau i1}, N_{\tau i2}$  – текущие значения мощностей относительного скольжения, то есть мощностей, расходуемых на контактных поверхностях соответствующих рабочих валков;

$N_{Fi}, N_{ui}$  – мощности, расходуемые непосредственно на пластическое формоизменение и на преодоление инерционных сил в рамках данного  $i$ -го выделенного элементарного объема.

Раскрыв, в соответствии с рекомендациями работ [1, 2] составляющие уравнения (6) и определив дополнительно инерционную составляющую, получим:

$$\begin{aligned} & \sigma_{xi1} h_{xi1} V_{xi1} + \frac{\tau_{x1i1} + \tau_{x1i2}}{2 \cos \alpha_{x1i}} \Delta x V_{e1} + \frac{\tau_{x2i1} + \tau_{x2i2}}{2 \cos \alpha_{x2i}} \Delta x V_{e2} = \\ & = \sigma_{xi2} h_{xi2} + \frac{1}{2} \left[ \tau_{x1i1} \left( V_{e1} - \frac{V_{xi1}}{\cos \alpha_{x1i}} \right) + \tau_{x1i2} \left( V_{e1} - \frac{V_{xi2}}{\cos \alpha_{x1i}} \right) \right] \times \\ & \times \frac{\Delta x}{\cos \alpha_{x1i}} + \frac{1}{2} \left[ \tau_{x2i1} \left( V_{e2} - \frac{V_{xi1}}{\cos \alpha_{x2i}} \right) + \tau_{x2i2} \left( V_{e2} - \frac{V_{xi2}}{\cos \alpha_{x2i}} \right) \right] \times \\ & \times \frac{\Delta x}{\cos \alpha_{x2i}} + \frac{1}{2} K_{\Lambda} (2K_{xi1} + 2K_{xi2}) h_{xi2} \ln \left( \frac{h_{xi1}}{h_{xi2}} \right) V_{xi2} + \\ & + \rho_M \frac{h_{xi1} + h_{xi2}}{2} \Delta x a_{xi} V_{xi2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где положительные значения нормальных осевых напряжений  $\sigma_{xi1}$  и  $\sigma_{xi2}$  соответствуют напряжениям сжатия, в то время как знак (+) перед касательными контактными напряжениями  $\tau_{x1i1}, \tau_{x2i1}, \tau_{x1i2}, \tau_{x2i2}$  соответствуют зонам отставания, протяженностью  $L_{on1}$  и  $L_{on2}$ , а знак (–) – зонам опережения, протяженностью  $L_{on1}$  и  $L_{on2}$  (см. рис. 1);

$V_{xi1}, V_{xi2}$  – скорости перемещения прокатываемого металла в начальном  $cd$  и конечном  $ae$  граничных сечениях, соответственно (см. рис. 1, б);

$\alpha_{x1i}, \alpha_{x2i}$  – текущие значения углов контакта на нижнем и верхнем рабочих валках;

$K_{\Lambda}$  – коэффициент немонотонности пластической деформации, физический смысл и методики определения которого рассмотрены достаточно подробно в работе [5];

$2K_{xi1} = 1,155\sigma_{sxi1}$ ;  $2K_{xi2} = 1,155\sigma_{sxi2}$  – значения удвоенного сопротивления сдвигу прокатываемого металла в начальном и конечном граничных сечениях, определяемые в соответствии с методиками, рассмотренными в работе [1];

$\rho_M$ ,  $a_{xi}$  – плотность металла прокатываемой полосы и величина его ускорения, имеющего место в рамках выделенного  $i$ -го элементарного объема и определяемая как:

$$a_{xi} = (V_{xi2} - V_{xi1})(V_{xi1} + V_{xi2}) / (2\Delta x) = (V_{xi2}^2 - V_{xi1}^2) / (2\Delta x).$$

Следует отметить, что известные теоретические решения основаны на использовании инженерного варианта условия пластичности  $p_{xi2} - \sigma_{xi2} = 2K_{xi2}$ , не учитывающего влияние касательных компонент девиатора напряжений  $\tau_{xyi2}$ . В случае же горячей прокатки, более корректным является использование полной формы записи условия пластичности в виде [5]:

$$(p_{xi2} - \sigma_{xi2})^2 + 4\tau_{xyi2}^2 = 4K_{xi2}^2, \quad (8)$$

где  $p_{xi2}$ ,  $\sigma_{xi2}$  – величина нормальных контактных и нормальных осевых напряжений, действующих в конечном граничном сечении  $ae$  выделенного  $i$ -го элементарного объема (см. рис. 1, б).

Исходя из того, что усредненное по толщине значение касательных компонент девиатора напряжений может быть представлено как  $\tau_{xyi2} = (|\tau_{xi1i2}| + |\tau_{x2i2}|) / 4$  и, используя аналитические формы записи условий внешнего контактного трения в виде (4) и (5), условие (8) может быть приведено к виду:

$$\sigma_{xi2} = p_{xi2} - K_{xi2} \sqrt{4 - (|\mu_{x1i2}| + |\mu_{x2i2}|)^2}. \quad (9)$$

Учитывая условие (9) и приняв вследствие наличия незначительных текущих значений углов контакта  $\alpha_{x1i}$  и  $\alpha_{x2i}$  величину их косинусов равной  $\cos \alpha_{x1i} \approx \cos \alpha_{x2i} \approx 1,0$  уравнение (7) может быть трансформировано как:

$$\begin{aligned} & \sigma_{xi1} h_{xi1} V_{xi1} + 0,5(2K_{xi1} \mu_{x1i1} + 2K_{xi2} \mu_{x1i2}) \Delta x V_{e1} + 0,5(2K_{xi1} \mu_{x2i1} + 2K_{xi2} \mu_{x2i2}) \times \\ & \times \Delta x V_{e2} = [p_{xi2} - K_{xi2} \sqrt{4 - (|\mu_{x1i2}| + |\mu_{x2i2}|)^2}] h_{xi2} V_{xi2} + \\ & + 0,5[2K_{xi1} \mu_{x1i1} (V_{e1} - V_{xi1}) + 2K_{xi2} \mu_{x1i2} (V_{e1} - V_{xi2})] \Delta x + \\ & + 0,5[2K_{xi1} \mu_{x2i1} (V_{e2} - V_{xi1}) + 2K_{xi2} \mu_{x2i2} (V_{e2} - V_{xi2})] \Delta x + \\ & + 0,5K_{\Lambda} (2K_{xi1} + 2K_{xi2}) h_{xi2} V_{xi2} \ln(h_{xi1} / h_{xi2}) + \\ & + \rho_M (h_{xi1} + h_{xi2}) (V_{xi2}^2 - V_{xi1}^2) V_{xi2} / 4 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя в дальнейшем кинематические соотношения, предоставляемые гипотезой плоских сечений [4]:

$$V_{xi1} = V_1 h_1 / h_{xi1}; \quad V_{xi2} = V_1 h_1 / h_{xi2}, \quad (11)$$

а также, проведя соответствующие математические преобразования и последующие сокращения, получим:

$$\begin{aligned} & \sigma_{xi1} = p_{xi2} - K_{xi2} \sqrt{4 - (|\mu_{x1i2}| + |\mu_{x2i2}|)^2} - K_{xi1} (\mu_{x1i1} + \mu_{x2i1}) \Delta x / h_{xi1} - \\ & - K_{xi2} (\mu_{x1i2} + \mu_{x2i2}) \Delta x / h_{xi2} + 0,5K_{\Lambda} (2K_{xi1} + 2K_{xi2}) \ln(h_{xi1} / h_{xi2}) + \\ & + 0,25\rho_M (h_{xi1} + h_{xi2}) V_1^2 h_1^2 (1/h_{xi2}^2 - 1/h_{xi1}^2) / h_{xi2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следуя принятой рекуррентной схеме решения, в соответствии с которой результаты расчета конечного граничного сечения предыдущего ( $i-1$ ) являются исходными данными для расчета начального граничного сечения последующего  $i$ -го элементарного объема, то есть

с учетом известных удвоенного значений сопротивления сдвигу  $2K_{xi1} = 2K_{x(i-1)2}$  нормальных осевых  $\sigma_{xi1} = \sigma_{x(i-1)2}$  и нормальных контактных  $p_{xi1} = p_{x(i-1)2}$  напряжений, а также известных согласно (1)–(5) всех геометрических характеристик и коэффициентов внешнего трения, уравнение (12) содержит только одну неизвестную величину нормальных контактных напряжений  $p_{xi2}$ , по отношению к которой в окончательном виде имеем:

$$p_{xi2} = \left\{ 2(\sigma_{xi1} + K_{xi2} \sqrt{4 - (|\mu_{x1i2}| + |\mu_{x2i2}|)^2}) h_{xi2} + 2K_{xi1} (\mu_{x1i1} + \mu_{x2i1}) \times \right. \\ \left. \times \Delta x h_{xi2} / h_{xi1} - K_{\Lambda} (2K_{xi1} + 2K_{xi2}) h_{xi2} \ln(h_{xi1} / h_{xi2}) - 0,5 \rho_M (h_{xi1} + h_{xi2}) \times \right. \\ \left. \times V_1^2 h_1^2 (1/h_{xi2}^2 - 1/h_{xi1}^2) \right\} / [2h_{xi2} - (\mu_{x1i2} + \mu_{x2i2}) \Delta x], \quad (13)$$

где, исходя из условия пластичности (9), может быть определена и соответствующая величина нормальных осевых напряжений  $\sigma_{xi2}$ , действующих в конечном *ae* граничном сечении выделенного *i*-го элементарного объема (см. рис. 1, б).

В качестве направления *i*-го рекуррентного решения зоны пластического формоизменения принято направление, соответствующее перемещению прокатываемой полосы, с учетом чего начальные условия соответствовали:

$$x_{i1}|_{i=1} = L_{nl}; \quad h_{xi1}|_{i=1} = h_0; \quad \mu_{x1i1}|_{i=1} = \mu_{0om1}; \quad \mu_{x2i1}|_{i=1} = \mu_{0om2}; \\ 2K_{xi1}|_{i=1} = 1,155 \sigma_{s0}; \quad \sigma_{xi1}|_{i=1} = -\sigma_0; \quad p_{xi1}|_{i=1} = 0,0, \quad (14)$$

где  $\sigma_{s0}$  – исходное значение напряжений текучести, учитывающее интенсивность междеформационного разупрочнения [1];

$\sigma_0$  – напряжения заднего натяжения прокатываемой полосы.

Условия связи, используемые при переходе от расчета *i*-го к расчету (*i* + 1) элементарного объема в этом случае соответствовали:

$$x_{(i+1)1} = x_{i2}; \quad h_{x(i+1)1} = h_{xi2}; \quad \mu_{x1(i+1)1} = \mu_{x1i2}; \quad \mu_{x2(i+1)1} = \mu_{x2i2}; \\ 2K_{x(i+1)1j} = 2K_{xi2j}; \quad \sigma_{x(i+1)1j} = \sigma_{xi2j}; \quad \sigma_{x(i+1)1} = \sigma_{xi2}; \quad p_{x(i+1)1} = p_{xi2}. \quad (15)$$

Помимо численного рекуррентного решения зоны пластического формоизменения математическая модель напряженно-деформированного состояния металла при горячей прокатке относительно тонких лент и полос по аналогии с методиками работ [1, 2] включала в себя:

- расчет зоны упругого восстановления металла на выходе из рабочих валков на основе обобщенного закона Гука и условий статического равновесия;
- организацию итерационной процедуры по расчету относительной протяженностей зон опережения на нижнем  $L_{on1}$  и верхнем  $L_{on2}$  рабочих валках исходя из условия обеспечения равенства расчетных и заданных значений напряжений переднего натяжения  $\sigma_1$ ;
- численное интегрирование локальных характеристик напряженного состояния металла с целью определения силы и моментов прокатки;
- организация итерационных процедур по учету упругого сплющивания рабочих валков;
- расчет локальных и результирующих показателей степени использования запаса пластичности прокатываемого металла.

В качестве примера результата численной реализации математической модели на рис. 2 представлены расчетные распределения удвоенного значения сопротивления сдвигу  $2K_x$ , нормальных контактных  $p_x$  и нормальных осевых напряжений  $\sigma_x$ , а также приведенных к единице ширины значений силы  $P/B$  и суммарного момента  $M/B$  прокатки, полученных применительно к штрипсовому стану 300. Достаточно сложный характер представленных распределений подтверждает целесообразность реализации именно численного подхода. При этом использование более корректных аналитических форм записи условий внешнего трения и условия пластичности, позволяет уточнить конечные результаты на 10...20 %

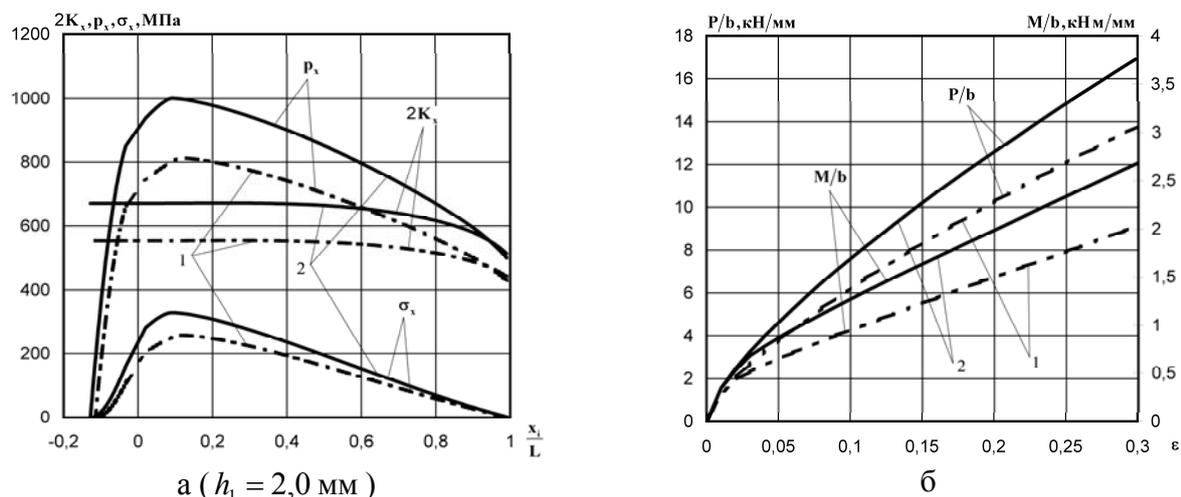


Рис. 2. Расчетные распределения локальных (а) и интегральных (б) характеристик напряженного состояния металла при горячей прокатке лент из стали 10 (1) и стали 40ХН (2):  $h_0 = 4,0$  мм;  $R = 150$  мм;  $\mu_0 = 0,25$ ;  $t = 850^0 C$ ;  $V_1 = 5$  м/с;  $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$  МПа

### ВЫВОДЫ

На основе численного рекуррентного решения конечно-разностных форм статодинамического условия баланса энергетических затрат, имеющих место в рамках выделенных элементарных объемов зоны пластического формоизменения при одновременном использовании более строгих форм записи условия внешнего трения и условия пластичности, получила развитие математическая модель напряженно-деформированного состояния металла при горячей прокатке относительно тонких лент и полос. При этом степень уточнения получаемых результатов составила 10...20 %.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоринов В. А. Математическое моделирование напряжений, деформаций и основных показателей качества при прокатке относительно широких листов и полос : монография / В. А. Федоринов, А. В. Сатонин, Э. П. Грибков. – Краматорск : ДГМА, 2010. – 243 с.
2. Сатонин А. В. Численная одномерная математическая модель процесса прокатки относительно тонких композиционных листов и полос, основанная на энергетическом подходе / А. В. Сатонин // Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні. – Краматорськ : ДДМА, 1998. – С. 36–41.
3. Мазур В. Л. Теория и технология тонколистовой прокатки (численный анализ и технические приложения) / В. Л. Мазур, А. В. Новицын. – Днепропетровск : РВА «Дніпро - VAL», 2010. – 500 с.
4. Целиков А. И. Теория продольной прокатки / А. И. Целиков, Г. С. Никитин, С. Е. Рокотян. – М. : Металлургия, 1980. – 320 с.
5. Потапкин В. Ф. Метод полей линий скольжения в теории прокатки широких полос : монография / В. Ф. Потапкин. – Краматорск : ДГМА, 2005. – 316 с.

Сатонин А. В. – д-р техн. наук, проф. кафедры АММ ДГМА;

Настоящая С. С. – аспирант ДГМА;

Коренко М. Г. – аспирант ПГТУ;

Переходченко В. А. – нач. бюро ЗАО «НКМЗ».

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

ПГТУ – Приазовский государственный технический университет, г. Мариуполь.

ЗАО «НКМЗ» – ЗАО «Новокраматорский машиностроительный завод», г. Краматорск.

E-mail: amm@dgma.donetsk.ua